

# Mathématiques : 3ème Année Collège

## Séance 3 (Racines carrées)

### Sommaire

#### I- La racine carrée d'un nombre réel positif

1-1/ Définition

1-2/ Propriété (Le carré d'une racine carrée)

1-3/ Remarques importantes

#### II- Résolution de l'équation $x^2 = a$

2-1/  $a > 0$

2-2/  $a = 0$

2-3/  $a < 0$

#### III- Les opérations sur les racines carrées

3-1/ Produit de deux racines carrées

3-2/ Quotient de deux racines carrées

3-3/ Rendre un dénominateur rationnel ou supprimer le radical au dénominateur

#### IV- Exercices

4-1/ Exercice 1

4-2/ Exercice 2

4-3/ Exercice 3

4-4/ Exercice 4

4-5/ Exercice 5

4-6/ Exercice 6

---

#### I- La racine carrée d'un nombre réel positif

1-1/ Définition

Soit  $a$  un nombre réel positif ou nul ( c'est-a-dire  $a \geq 0$ ).

La racine carrée de  $a$  est le nombre réel positif dont le carré est égale à  $a$ , elle est notée  $\sqrt{a}$ .

Le symbole  $\sqrt{\quad}$  s'appelle : symbole radical.

## 1-2/ Propriété (Le carré d'une racine carrée)

Soit  $a$  un nombre réel tel que  $a > 0$ .

$$\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a \text{ et } \sqrt{(-a)^2} = a$$

### Exemple

## 1-3/ Remarques importantes

La racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas ( $\sqrt{-9}$  n'existe pas).

La racine carrée d'un nombre n'est jamais égale à un nombre négatif ( $\sqrt{25} \neq -5$ ).

L'opposé de  $\sqrt{a}$  (avec  $a \geq 0$ ) est  $-\sqrt{a}$ . (L'opposé de  $\sqrt{11}$  est  $-\sqrt{11}$ ).

$\sqrt{0} = 0$  et  $\sqrt{1} = 1$

## 1-4/ Les racines carrées parfaites

$$\sqrt{1} = 1 ; \sqrt{4} = 2 ; \sqrt{9} = 3 ; \sqrt{16} = 4 ; \sqrt{25} = 5 ; \sqrt{36} = 6 ; \sqrt{49} = 7$$

$$\sqrt{64} = 8 ; \sqrt{81} = 9 ; \sqrt{100} = 10 ; \sqrt{121} = 11 ; \sqrt{144} = 12 ; \sqrt{169} = 13$$

$$\sqrt{196} = 14 ; \sqrt{225} = 15 ; \sqrt{256} = 16 ; \sqrt{289} = 17 ; \sqrt{324} = 18 ; \sqrt{361} = 19 ; \sqrt{400} = 20$$

## II- Résolution de l'équation $x^2 = a$

### 2-1/ $a > 0$

L'équation  $x^2 = a$  est respectivement équivalente à :

$$\begin{aligned} x^2 - a &= 0 \\ \Rightarrow x^2 - \sqrt{a}^2 &= 0 \\ \Rightarrow (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) &= 0 \\ \Rightarrow (x - \sqrt{a}) = 0 \text{ ou } (x + \sqrt{a}) &= 0 \\ \Rightarrow x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a} \end{aligned}$$

Donc cette équation admet deux solutions:  $\sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$ .

### 2-2/ $a = 0$

L'équation  $x^2 = a$  est respectivement équivalente à  $x^2 = 0$ , ce qui signifie que  $x = 0$ .

Donc cette équation admet pour solution le nombre 0.

### 2-3/ $a < 0$

L'équation  $x^2 = a$  n'admet pas de solution.

## III- Les opérations sur les racines carrées

### 3-1/ Produit de deux racines carrées

#### Propriété

Soient a et b deux nombres réels positifs.

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

#### Exemple

#### Extraire un carré parfait

Soient a et b deux nombres réels positifs non nuls.

$$\sqrt{a^2 \times b} = a\sqrt{b}$$

#### Exemple

### 3-2/ Quotient de deux racines carrées

#### Propriété

Soient a et b deux nombres réels tels que  $a \geq 0$  et  $b > 0$ .

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

#### Exemple

### 3-3/ Rendre un dénominateur rationnel ou supprimer le radical au dénominateur

#### Propriété 1

Soient a et b et k deux nombres réels tels que  $b > 0$ .

$$\sqrt{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b} ; \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b} ; \frac{a}{k\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{kb}$$

#### Exemple

#### Propriété 2 (Expression du conjugué)

Pour supprimer le radical au dénominateur, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

Le conjugué de  $a - b$  est  $a + b$ , et le conjugué de  $a + b$  est  $a - b$ .

#### Exemple

## IV- Exercices

### 4-1/ Exercice 1

Calculer:

	$\sqrt{81} = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sqrt{121} = \underline{\hspace{2cm}}$	
--	--	--

$$\sqrt{(-3)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-\sqrt{7})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(2\sqrt{5})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(\sqrt{19})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{0,49} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{15^2 - 9^2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{2^2 \times 5^4} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{\frac{49}{36}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\left(\frac{-\sqrt{7}}{3}\right)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{\sqrt{169} - \sqrt{144}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{9 + \sqrt{49}}}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

## 4-2/ Exercice 2

Simplifier sous la forme de  $a\sqrt{b}$  tel que  $a$  et  $b$  sont des nombres réels et  $b \geq 0$  :

$$A = -3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$B = -2\sqrt{3} + \sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$C = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + \sqrt{5} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$D = \left(\sqrt{\sqrt{5} - 2}\right) \times \left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$E = \left(\sqrt{2\sqrt{7} - 2\sqrt{3}}\right) \times \left(\sqrt{2\sqrt{7} + 2\sqrt{3}}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$$

## 4-3/ Exercice 3

1. Simplifier sous la forme de  $a\sqrt{b}$  tel que  $a$  et  $b$  sont des nombres réels et  $b \geq 0$  :

$$A = \sqrt{80} + 3\sqrt{125} - \sqrt{45} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$B = 2\sqrt{18} - 5\sqrt{8} + \sqrt{200} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$C = \sqrt{99} - \sqrt{176} + 2\sqrt{44} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$D = -\sqrt{27} + \sqrt{75} - 4\sqrt{48} = \underline{\hspace{2cm}}$$

2. Calculer :

$$E = \sqrt{150} \times \sqrt{\frac{3}{162}} =$$

$$F = \sqrt{\frac{3}{10}} \times \sqrt{\frac{270}{8}} =$$

$$G = \sqrt{\frac{8}{27}} \times \sqrt{\frac{3}{50}} =$$

#### 4-4/ Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

$$x^2 = 16$$

$$x^2 = -4$$

$$-5x^2 = -25$$

$$\frac{x}{2} = \frac{8}{x}$$

$$\frac{2}{9}x^2 = 2$$

$$5 + 2x^2 = 3$$

#### 4-5/ Exercice 5

1. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = (\sqrt{75} - \sqrt{98}) (5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$B = (3 + \sqrt{11})^2 - (3 - \sqrt{11})^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$C = (\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{7}) (\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$D = \frac{2\sqrt{27} - 2\sqrt{3} + \sqrt{12}}{\sqrt{75} + \sqrt{48} - 7\sqrt{3}} =$$

2. Écrire les quotients suivants sans radical au dénominateur :

$$\frac{1}{\sqrt{7}} =$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} =$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{-10} =$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{-4} =$$

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}} =$$

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2\sqrt{3}} =$$

#### 4-6/ Exercice 6

On pose :

$$\begin{aligned}A &= 2 + 3\sqrt{5} \\B &= 49 + 12\sqrt{5} \\C &= 49 - 12\sqrt{5}\end{aligned}$$

1. Montrer que  $\sqrt{B} = A$
2. Dédire  $\sqrt{C}$
3. Calculer  $\sqrt{B} \times \sqrt{C}$
4. Calculer  $\sqrt{B} + \sqrt{C}$
5. Calculer  $\sqrt{B} - \sqrt{C}$