

Mathématiques : 3ème Année Collège
Séance 1 (Développement et factorisation)

Sommaire

I- Développement

1-1/ Définition

1-2/ Propriétés

II- Développer avec les identités remarquables

2-1/ Propriété 1 : Développer le carré d'une somme

2-2/ Propriété 2 : Développer le carré d'une différence

2-3/ Propriété 3 : Développer le produit d'une somme par une différence

III- Factorisation

3-1/ Définition

3-2/ Propriétés

IV- Factoriser avec les identités remarquables

4-1/ Propriété 1 : Factoriser pour obtenir le carré d'une somme

4-2/ Propriété 2 : Factoriser pour obtenir le carré d'une différence

4-3/ Propriété 3 : Factoriser pour obtenir le produit d'une somme par une différence

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

5-2/ Exercice 2

5-3/ Exercice 3

5-4/ Exercice 4

5-5/ Exercice 5

5-6/ Exercice 6

5-7/ Exercice 7

5-8/ Exercice 8

I- Développement

1-1/ Définition

Développer : c'est transformer un produit en une somme ou en une différence.

1-2/ Propriétés

Soient a ,b ,c ,d et k des nombres réels.

$$k(a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k(a - b) = k \times a - k \times b$$

$$(a + b)(c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Exemples

II- Développer avec les identités remarquables

2-1/ Propriété 1 : Développer le carré d'une somme

Soient a et b deux nombres, on a alors:

$$(a + b)^2 = (a)^2 + 2 \times a \times b + (b)^2$$

2-2/ Propriété 2 : Développer le carré d'une différence

Soient a et b deux nombres, on a alors:

$$(a - b)^2 = (a)^2 - 2 \times a \times b + (b)^2$$

2-3/ Propriété 3 : Développer le produit d'une somme par une différence

Soient a et b deux nombres, on a alors:

$$(a + b)(a - b) = (a)^2 - (b)^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

III- Factorisation

3-1/ Définition

Factoriser, c'est transformer une somme ou une différence en un produit.

3-2/ Propriétés

a, b et k désignent des nombres réels :

$$k \times a + k \times b = k(a + b)$$

$$k \times a - k \times b = k(a - b)$$

Remarque importante

Pour factoriser une expression algébrique on cherche le facteur commun.

Exemples

IV- Factoriser avec les identités remarquables

4-1/ Propriété 1 : Factoriser pour obtenir le carré d'une somme

Soient A et B deux expressions (littérales ou non), on a alors :

$$(A)^2 + 2 \times A \times B + (B)^2 = (A + B)^2$$

4-2/ Propriété 2 : Factoriser pour obtenir le carré d'une différence

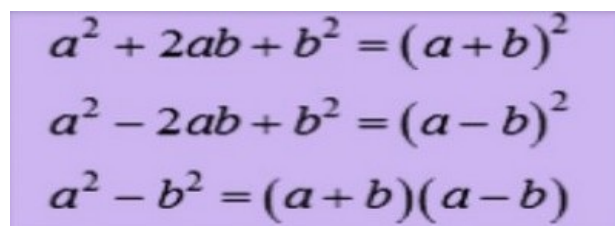
Soient A et B deux expressions (littérales ou non), on a alors :

$$(A)^2 - 2 \times A \times B + (B)^2 = (A - B)^2$$

4-3/ Propriété 3 : Factoriser pour obtenir le produit d'une somme par une différence

Soient A et B deux expressions (littérales ou non), on a alors :

$$(A)^2 - (B)^2 = (A + B) \times (A - B)$$


$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a - b)^2 \\ a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \end{aligned}$$

V- Exercices

5-1/ Exercice 1

Développer et réduire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= 3(2x - 1) - 4(2 - 3x) + 2(x + 1) = \underline{\hspace{2cm}} \\
B &= -\frac{1}{3}(3x + 6) + \frac{1}{5}(25x - 5) - x = \underline{\hspace{2cm}} \\
C &= x^2(x^3 - x^2) - 3(x^5 + x^4) = \underline{\hspace{2cm}} \\
D &= (x - 1)(x^2 + x - 2) = \underline{\hspace{2cm}} \\
E &= (x + 2)^2 - (x - 3)^2 + (x - 1)(x + 1) = \underline{\hspace{2cm}}
\end{aligned}$$

5-2/ Exercice 2

Factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= 4x^2 + 8x = \underline{\hspace{2cm}} \\
B &= 21x^5 + 14x^4 - 21x^3 - 35x = \underline{\hspace{2cm}} \\
C &= \frac{1}{a} - \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^3} = \underline{\hspace{2cm}} \\
D &= (x + 1)(x - 3) - (x + 1)(2x - 1) = \underline{\hspace{2cm}} \\
E &= 25 + 10x + x^2 = \underline{\hspace{2cm}} \\
F &= x^4 + x^2 + \frac{1}{4} = \underline{\hspace{2cm}} \\
G &= 7x^2 - 7 + x^2 - 2x + 1 = \underline{\hspace{2cm}} \\
H &= x^2 - 8x + 7 = \underline{\hspace{2cm}}
\end{aligned}$$

5-3/ Exercice 3

On considère : $E = (2x + 3)^2 - (5 - x)^2$

1. Développer et réduire E
2. Factoriser E
3. Calculer E pour $x=2$
4. Résoudre l'équation $3x^2 + 22x - 16 = 0$

5-4/ Exercice 4

x est un nombre réel.

a , b et c sont des expressions algébrique tel que :

$$\begin{aligned}
a &= 25x^2 - 49 + (5x + 7)(-2x + 1) \\
b &= x^2 - 4x + 4 - (x - 2)(7x + 3)
\end{aligned}$$

1. Développer et réduire les expressions a et b
2. Factoriser a et b

On pose $c = b - a$

3. Factoriser c
4. Résoudre l'équation $c = 0$

5-5/ Exercice 5

Soit a un nombre entier naturel non nul.

Écris l'expression $2a^2 + 2$ sous la forme d'une somme des carrés de deux nombres entiers naturels.

5-6/ Exercice 6

a et b sont deux nombres réels tel que :

$$\begin{aligned}a + b &= 1 \\ a^2 + b^2 &= 2\end{aligned}$$

1. Calculer : $a^4 + b^4$

5-7/ Exercice 7

On considère l'expression : $F = 4x^2 - 9 - (2x - 3)(5x + 2)$

1. Montrer que : $(2x - 3)(5x + 2) = 10x^2 - 11x - 6$
2. En déduire que : $F = -6x^2 + 11x - 3$
3. Calculer F pour $x = -2$ et pour $x = \frac{3}{2}$.
4. Montrer que : $4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3)$
5. En déduire que : $F = (2x - 3)(-3x + 1)$

5-8/ Exercice 8

Soit l'expression $S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ avec $x \neq 1$.

1. Montrer que : $(1 - x)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) = 1 - x^5$
2. En déduire que : $S = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$
3. Déterminer la valeur de $E = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$.