Théorème de Pythagore

Compétences évaluées dans ce chapitre :

(**T** : compétences transversales, **N** : activités numériques, **G** : activités géométriques, **F** : gestion de données et fonctions)

Intitulé des compétences		Eval.1	Eval.2	Eval.3
T1	Connaître le vocabulaire, les définitions et les propriétés du cours	○ ○	○ ○	○ ○
T2	Réaliser une figure géométrique aux instruments d'après un programme de construction *	○ ○	○ ○	○ ○
G5	Utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle *	○ ○	○ ○	○ ○
G6	Utiliser le théorème de Pythagore pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle *	○ ○	○ ○	○ ○
G7	Utiliser la réciproque du théorème de Pythagore pour démontrer qu'un triangle est rectangle *	○ ○	○ ○	○ ○

Taux de réussite : . . . . %
Note du chapitre : . . . . /20
Moyenne de la classe : . . . . /20

* : cette compétence fait partie du **socle commun**.

Légende du tableau de compétences :

Deux points verts : *Je sais très bien faire*

Un point vert : *Je sais bien faire, mais il reste quelques erreurs*

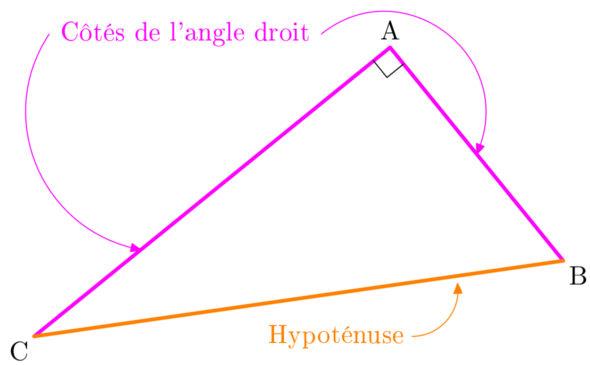
Un point rouge : *Je ne sais pas bien faire, il y a trop d'erreurs*

Deux points rouges : *Je sais pas faire du tout*

22.1 Vocabulaire et notations

Définitions

- On dit qu'un triangle est **rectangle** si l'un de ses trois angles est un angle droit.
- Dans un triangle rectangle, le côté opposé au sommet de l'angle droit est appelé **hypoténuse** ; c'est le côté le plus long du triangle.



Carré d'un nombre positif

Le **carré** d'un nombre positif a est égal au produit du nombre a par lui-même.
On note $a^2 = a \times a$, et on prononce "a au carré".

Exemples :

▶ Le carré de 8 se note 8^2 et est égal à $8 \times 8 = 64$. ⚠ Ne pas confondre avec le **double** de 8, qui vaut $8 + 8 = 2 \times 8 = 16$! !

▶ Le carré de 5,3 est $5,3^2 = 5,3 \times 5,3 = 28,09$ ▶ Le carré de $\frac{2}{7}$ est $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$

On appelle **carré parfait** le carré d'un nombre entier positif. Voici la liste des quinze premiers carrés parfaits :

Nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Carré	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

Utiliser sa calculatrice

▶ Pour déterminer le carré d'un nombre positif, on utilise la touche $\boxed{x^2}$:

pour calculer le carré de 2,5 on tape la séquence $\boxed{\mathbf{2}}$ $\boxed{\mathbf{.}}$ $\boxed{\mathbf{5}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{\mathbf{EXE}}$

et la calculatrice affiche $\boxed{\begin{array}{l} 2.5^2 \\ \hfill 6.25 \end{array}}$ d'où $\boxed{2,5^2 = 6,25}$

▶ Pour déterminer le nombre positif dont on nous donne le carré, on utilise la touche $\boxed{\sqrt{}}$, que l'on atteint en tapant $\boxed{\mathbf{SHIFT}}$ $\boxed{x^2}$. Pour calculer le nombre positif dont le carré est égal à 441, on tape la séquence $\boxed{\sqrt{}}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\boxed{\mathbf{4}}$ $\boxed{\mathbf{1}}$ $\boxed{\mathbf{EXE}}$

et la calculatrice affiche $\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{}(441) \\ \hfill 21 \end{array}}$ d'où $\boxed{\sqrt{441} = 21}$

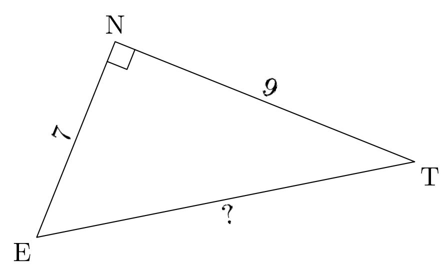
22.2 Utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle

Théorème de Pythagore

Si un triangle est rectangle,
alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux côtés de l'angle droit.

Exemples d'utilisation

▶ **Calculer la longueur de l'hypoténuse**



On sait que le triangle ENT est rectangle en N. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$$ET^2 = NT^2 + NE^2$$

En remplaçant les longueurs connues par leurs valeurs, on obtient :

$$ET^2 = 9^2 + 7^2$$

$$ET^2 = 81 + 49$$

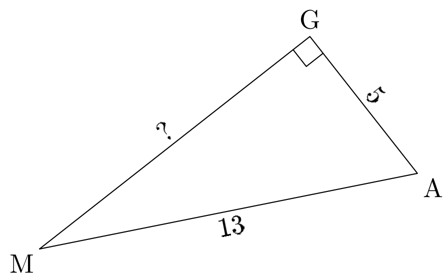
$$ET^2 = 130$$

En utilisant la touche $\boxed{\sqrt{}}$ de la calculatrice, on trouve :

$$ET = \sqrt{130} \approx 11,4$$

Donc la longueur du côté [ET] est 11,4 environ.

► Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit



On sait que le triangle MAG est rectangle en G. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$$MA^2 = GM^2 + GA^2$$

En remplaçant les longueurs connues par leurs valeurs, on obtient :

$$13^2 = GM^2 + 5^2$$

$$169 = GM^2 + 25$$

$$GM^2 = 169 - 25$$

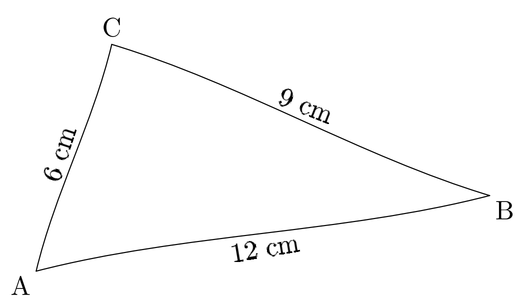
$$GM^2 = 144$$

En utilisant la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculatrice, on trouve :

$$GM = \sqrt{144} = 12$$

Donc la longueur du côté [GM] est 12.

22.3 Utiliser le théorème de Pythagore pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle



► Démontrons que ce triangle n'est pas rectangle

Le côté le plus long est [AB] ; si le triangle était rectangle, ce côté serait l'hypoténuse.

D'une part, on a $AB^2 = 12^2 = 144$.

D'autre part, on a $CB^2 + CA^2 = 9^2 + 6^2 = 81 + 36 = 117$.

On constate que $AB^2 \neq CA^2 + CB^2$.

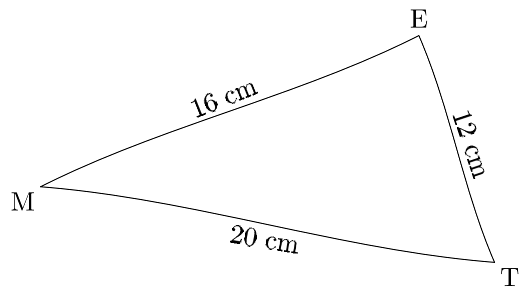
Si le triangle était rectangle, d'après le théorème de Pythagore, on aurait l'égalité $AB^2 = CA^2 + CB^2$.

Ce n'est pas le cas, donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

22.4 Utiliser la réciproque du théorème de Pythagore pour démontrer qu'un triangle est rectangle

Réciproque du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus long côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés,
alors ce triangle est rectangle, et le côté le plus long est l'hypoténuse.



► **Démontrons que ce triangle est rectangle**

Le côté le plus long est [MT] ; si le triangle était rectangle, ce côté serait l'hypoténuse.

D'une part, on a $MT^2 = 20^2 = 400$.

D'autre part, on a $EM^2 + ET^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$.

On constate que $MT^2 = EM^2 + ET^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ETM est rectangle en E.